

2.2.11 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice II

Předpoklady: 2210

- Př. 1:** Jarda dostává od zaměstnavatele každý měsíc k stravenek v hodnotě 50 Kč. Zapiš výrazem, kolik peněz může utratit za obědy:
- každý měsíc,
 - tento měsíc, pokud mu ještě 5 stravenek zbylo z minulého měsíce,
 - každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč,
 - každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč a jejich počet se sníží o 3.

a) každý měsíc

$$50 \cdot k \quad (\text{hodnota stravenky} \cdot \text{počet stravenek})$$

b) tento měsíc, pokud mu ještě 5 stravenek zbylo z minulého měsíce

$$50 \cdot (k + 5)$$

c) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč

$$(50 + 10) \cdot k = 60k$$

d) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč a jejich počet se sníží o 3

$$(50 + 10)(k - 3) = 60(k - 3)$$

- Př. 2:** Otec s dcerou šli na výlet. Otcův krok měří 80 cm, dcera je ještě malá a jeden krok má dlouhý pouze 50 cm. Jak dlouhý byl výlet, když dcera ušla o tři tisíce kroků více než otec?

Počet kroků otce	...	k
Počet kroků dcery	...	$k + 3000$
Vzdálenost, kterou ušli	...	v
Otec ušel	$v = 0,8k$	
Dcera ušla	$v = 0,5(k + 3000)$	

$$0,8k = 0,5(k + 3000)$$

$$0,8k = 0,5k + 1500$$

$$0,3k = 1500$$

$$k = \frac{1500}{0,3} = 5000 \quad \Rightarrow \text{Otec ušel 5000 kroků.}$$

$$v = 0,8k = 0,8 \cdot 5000 = 4000$$

Výlet byl dlouhý 4000 m.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba je uvedena v následujícím příkladu jako bod a). Někteří studenti spočítají pouze počet kroků a zapomenou z něj vypočítat ušlou vzdálenost.

- Př. 3:** Následující rovnice jsou neúspěšnými pokusy o vyřešení předchozího příkladu. Pokus se je interpretovat a oprav chyby, které se v nich vyskytují.

a) $0,8k = 3000 + 0,5k$

b) $0,8k_o = 0,5(k_d + 3000)$

$$c) 0,8k_o + 0,5k_d + 3000 = v$$

$$d) 0,8k + 0,5(k + 3000) = v$$

$$e) \frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$$

$$a) 0,8k = 3000 + 0,5k$$

Pokus je podobný výše použitému řešení. Výrazy $0,8k$ a $0,5k$ mají význam vzdáleností (délka kroku * počet kroků) a nemůžeme je sčítat s kroky \Rightarrow správně $0,8k = 0,5 \cdot 3000 + 0,5k$.

$$b) 0,8k_o = 0,5(k_d + 3000)$$

Opět pokus o klasické řešení porovnáním vzdálenosti, kterou ušel otec a dcera. Chyba vznikla asi snahou udělat dva kroky najednou.

Správně:

$$0,8k_o = 0,5k_d \quad (\text{otec ušel stejně jako dcera})$$

$$0,8k_o = 0,5(k_o + 3000) \quad (\text{dcera udělala o 3000 kroků víc})$$

$$c) 0,8k_o + 0,5k_d + 3000 = v$$

Několik chyb: Opět se sčítá vzdálenost s kroky jako v prvním případě. Navíc rovnice nepopisuje realitu, vzdálenost, kterou výletníci ušli, počítá jako součet vzdálenosti, kterou ušel otec, a vzdálenosti, kterou ušla dcera (nesmysl), ke které navíc přičítá počet kroků. Spíše než pokus o logické vyřešení příkladu jde o sestavení libovolné rovnice, která obsahuje všechny údaje ze zadání.

$$d) 0,8k + 0,5(k + 3000) = v$$

Dobře napsaná rovnice popisující špatný předpoklad: vzdálenost ušlá otcem + vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.

Správná úvaha: vzdálenost ušlá otcem = vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.

$$0,8k = 0,5(k + 3000) = v$$

$$e) \frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$$

Zajímavý nápad, umožňuje určit rovnou délku výletu.

Výraz $\frac{v}{0,8}$ určuje počet kroků, které ušel otec, výraz $\frac{v}{0,5}$ počet kroků dcery \Rightarrow v rovnici

nemůže vystupovat výraz $3000 \cdot 0,5$ (vzdálenost ušlá dcerou při 3000 krocích), musí tam být pouze počet 3000 kroků.

Vztah mezi počtem kroků otce a dcery je obrácený: $k_o + 3000 = k_d \Rightarrow \frac{v}{0,8} + 3000 = \frac{v}{0,5}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má svůj význam. Právě fakt, že studenti sestavují rovnice zcela odtrženě od jakéhokoliv významu a bez jakékoliv kontroly, vede k tomu, že slovní úlohy řešit neumějí. Snažím se je dovést k tomu, že nejdůležitější je sestavovat rovnice podle reality a umět zkontrolovat význam každého výrazu v nich.

Dalším vodítkem je v podstatě fyzikální pravidlo, že sčítat je možné pouze stejné věci (vzdálenosti mezi sebou, kroky mezi sebou, ale ne obojí dohromady).

Př. 4: V maturitním ročníku jsou dvě třídy. Ve třídě A z 25 studentů neudělalo maturitu 8 %. Celkově v ročníku při maturitách neuspělo 12,5 % studentů. Kolik procent

studentů neuspělo u maturit ve třídě 4.B, jestliže do ní chodilo 23 žáků? Pokus se najít řešení, ve kterém nebudeš určovat počty propadajících žáků v obou třídách.

Počet žáků propadajících ve třídě A ...	$25 \cdot 0,08$
Počet žáků propadajících ve škole ...	$48 \cdot 0,125$
Počet žáků propadajících ve třídě B ...	$23 \cdot x$

Studenti propadající ve škole = studenti propadající ve 4.A + studenti propadající ve 4.B.
 $48 \cdot 0,125 = 25 \cdot 0,08 + 23 \cdot x$

$$x = \frac{48 \cdot 0,125 - 25 \cdot 0,08}{23} = 0,174$$

Ve třídě 4.B propadlo 17,4% studentů.

Řešení předchozího příkladu využívá **Zákon zachování propadlíků**: Počet propadajících studentů ve škole se zachovává, ať už jej určujeme sčítáním za jednotlivé třídy nebo za celou školu najednou.

Př. 5: Najdi jiné vyjádření Zákona zachování propadlíků.

Počet propadlíků ve škole získáme sečtením počtu propadlíků v jednotlivých třídách.

Kdo propadne ve své třídě, propadá i ve své škole.

Sehnáním tříd dohromady se počet propadlíků nezmění.

Propadlíků je stejně v jednotlivých třídách dohromady jako v celé škole.

...

Zákon zachování propadlíků je speciálním příkladem zákona **zachování něčeho během dávání (smíchávání) věcí (látek) dohromady**. V takovém případě sečteme množství před smícháním a získané celkové množství se rovná množství po smíchání.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad a všechny zbývající v této hodině, jsou postaveny na tom, že sledujeme množství něčeho, co zůstává po celou dobu stejné („propadlíků“ v předchozím příkladu, čistých kyselin v následujících). To je logický postup a snažím se ho studentům předat. Naopak bojuji proti používání směšovací rovnic nebo křížových pravidel. Oblast jejich použití je z hlediska typologie příkladů malá (i když tam spadá většina chemických aplikací), přínos z hlediska logického přemýšlení nebo schopnosti řešit slovní úlohy nulový (nebo spíš podobně jako u vzorců pro procenta záporný, neboť sugerují studentům představu, že je správně něco počítat a nevědět proč).

Př. 6: Smícháním 6 litrů 50% kyseliny octové a 3 litrů 8% kyseliny octové vznikl nový roztok této kyseliny. Urči jeho koncentraci.

Koncentrace výsledného roztoku ... x

Čistá kyselina v 1. roztoku + čistá kyselina v 2. roztoku = čistá kyselina ve výsledném roztoku: $6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,08 = 9x$

$$3 + 0,24 = 9x$$

$$3,24 = 9x$$

$$x = 0,36$$

Výsledný roztok má koncentraci 36%.

Pedagogická poznámka: Opět nejčastější chyba $6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,08 = x$. Je třeba trvat na tom, aby rovnice měla význam.

Př. 7: Kolik kg 96% roztoku kyseliny sírové musíme přilít k 9 kg 8% roztoku této kyseliny, abychom dostali její 60% roztok?

Hmotnost přilévaného 96% roztoku	...	k
Hmotnost výsledného 60% roztoku	...	v

Hmotnost 96% roztoku + hmotnost 8% roztoku = hmotnost výsledného 60% roztoku:

$$k + 9 = v.$$

Čistá kyselina v 96% roztoku + čistá kyselina v 8% roztoku = čistá kyselina ve výsledném 60% roztoku: $0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6v$.

Dosadíme za v do druhé rovnice:

$$0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6(9 + k)$$

$$0,96k + 0,72 = 5,4 + 0,6k$$

$$0,96k - 0,6k = 5,4 - 0,72$$

$$0,36k = 4,68$$

$$k = 13$$

Je třeba přilít 13kg 96% roztoku kyseliny sírové.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví ihned rovnici $0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6(9 + k)$, což je samozřejmě v pořádku.

Př. 8: Kolika gramy vody musíme zředit 300g 40% kyseliny dusičné, aby zředěná kyselina měla koncentraci 15%?

Množství přilité vody	...	v
Množství výsledného roztoku	...	r

Hmotnost 30% roztoku + hmotnost vody = hmotnost výsledného roztoku: $300 + v = r$.

Čistá kyselina v 30% roztoku + čistá kyselina ve vodě (0% roztok) = čistá kyselina ve výsledném 15% roztoku: $0,4 \cdot 300 + 0 \cdot v = 0,15(300 + v)$.

$$120 + 0 = 45 + 0,15v$$

$$0,15v = 75$$

$$v = 500$$

Kyselinu musíme zředit 500g vody.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba vypadá takto: $0,4 \cdot 300 + 1 \cdot v = 0,15(300 + v)$ - do rovnice pro 100% čistou kyselinu se přidá voda. Vysvětlujeme si, že jde opět o sčítání různých věcí dohromady.

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí zachování čisté vody během smíchávání (místo zachování čisté kyseliny dusičné).

40% roztok kyseliny ve vodě = 60% roztok vody v kyselině

15% roztok kyseliny ve vodě = 85% roztok vody v kyselině

Čistá voda v 30% roztoku + čistá voda ve vodě (100% roztok) = čistá voda ve výsledném 15% roztoku: $300 \cdot 0,6 + v \cdot 1 = 0,85(v + 300)$.

$$180 + v = 0,85v + 255$$

$$v - 0,85v = 255 - 180$$

$$0,15v = 75$$

$$v = 500$$

Kyselinu musíme zředit 500g vody.

Př. 10: Petáková:

strana 19/cvičení 55

strana 19/cvičení 56

strana 19/cvičení 57

Shrnutí: V rovnicích, které sestavujeme při řešení slovních úloh, můžeme sčítat a porovnávat pouze členy se stejným významem.